4.11.19
רענן שכטר
054-5331043

דיסקרטית (לוגיקה) תירגול

לוגיקה היא תורת הפסוקים.

פסוק הוא משפט פשוט שאפשר לקבוע אם הוא אמת או שקר.

דוגמא: • היום יום שבת (פסוק).

• מה השעה? (לא פסוק).

נסמן אמת באות- T.

נסמן שקר באות- F.

נסמן את הפסוקים באותיות p, q, r.

קשרים לוגים

1) שלילה: "~" / ~p, p~, $\bar{p}$

דוגמא: אני יודע ; השלילה: אני לא יודע.

טבלת אמת

p	~p
T	F
F	T

(~T = F, ~F = T)

2) וגם: "∧"

דוגמא: ראובן חכם ושמעון שקדן.

טבלת אמת

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3) או: "∨"

דוגמא: יורד גשם או שמטרה פועלת.

טבלת אמת

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4) גרירה: "→"

דוגמא: אם יורד גשם אז יש עננים.

"יורד גשם" נקרא הגורר.

"יש עננים" נקרא הנגרר.

אז $p \rightarrow q$

p גורר, q נגרר.

טבלת אמת

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5) גרירה כפולה: "$\leftrightarrow$"

(נקרא גם שקילות.

דוגמא: מספר טבעי הוא זוגי אמ"מ מספר טבעי מתחלק ב-2.

טבלת אמת

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

תרגיל

כתוב את הפסוקים הבאים באמצעות האותיות p, q, r וקשרים לוגיים.

א) נתון: p הוא הפסוק - המשולש שווה שוקיים

q הוא הפסוק - המשולש שווה צלעות

r הוא הפסוק - המשולש ישר זווית.

1) המשולש שהוא לא שווה צלעות

2) המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים

3) אם המשולש שווה צלעות אז המשולש לא ישר זווית

4) המשולש לא שווה שוקיים או המשולש לא ישר זווית

5) זה לא נכון שמשולש שווה שוקיים או ישר זווית

ב) נתון $p=T$, $q=F$, $r=F$.

מצאו את הערכים של הפסוקים בסעיף א'.

תשובה

ב)

1) $\neg q = T$

2) $p \wedge r = F$

3) $\neg r \rightarrow q = T$

4) $\neg r \vee \neg p = T$

5) $\neg(p \vee r) = F$

תרגיל

כתוב טבלת אמת לפסוק הבא:

1) $d = \underbrace{(\overbrace{(\neg p \lor r)}^{a} \land \neg q)}_{b} \longrightarrow \underbrace{\neg(\neg p \to r)}_{c}$

p	q	r	a	b	c	d
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(a, b, c: ערכי עזר)

2) $e = \underbrace{\neg(\overbrace{(q \to \neg r)}^{a} \lor \overbrace{(p \land \neg q)}^{b})}_{c} \longrightarrow \overbrace{(p \lor \neg r)}^{d}$

p	q	r	a	b	c	d	e
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T

11.11.19

דיסקרטית - תירגול

משפט

יהיו p, q פסוקים. p שקול לוגי ל-q אם ל-p ו-q אותה טבלת אמת.

נסמן $p \equiv q$.

* **דוגמא:** $p \to q \equiv \neg p \vee q$

הוכחה:

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

חוקים

1) טאוטולוגיה: $p \vee \neg p \equiv T$

2) סתירה: $p \wedge \neg p \equiv F$

3) זהות: $p \vee F \equiv p$, $p \wedge T \equiv p$

4) שליטה: $T \vee p \equiv T$, $F \wedge p \equiv F$

5) כפילות: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

6) שלילה כפולה: $\neg(\neg p) \equiv p$

7) חילוף (קומוטטיביות): $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$

8) קיבוץ (אסוציאטיביות): $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

9) פילוג (דיסטריבוטיביות): $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

10) בליעה: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

11) דה-מורגן: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$, $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

12) גרירה: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

13) גרירה דו כיוונית: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

הוכחה לחוק הבליעה

$$p \vee (q \wedge r) \overset{\text{זהות}}{\equiv} (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \overset{\text{פילוג}}{\equiv} p \wedge (T \vee q) \overset{\text{שליטה}}{\equiv} p \wedge T \overset{\text{זהות}}{\equiv} p$$

תרגול

1) הוכח את השקילות הבאה: $\neg q \to \neg p \equiv p \to q$

$$\neg q \to \neg p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(\neg q) \vee (\neg p) \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} q \vee \neg p \overset{\text{חילוף}}{\equiv} \neg p \vee q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} p \to q$$

2) $(p \to q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge q) \equiv p \to q$

$$(p \to q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge q) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (p \to q) \vee ((p \to q) \wedge q) \overset{\text{בליעה}}{\equiv} p \to q$$

דרך ב':

$$(p \to q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge q) \overset{\text{בליעה}}{\equiv} (p \to q) \vee q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (\neg p \vee q) \vee q \overset{\text{קיבוץ}}{\equiv} \neg p \vee (q \vee q) \overset{\text{כפילות}}{\equiv}$$

$$\neg p \vee q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} p \to q$$

3) $$(p \to q) \to p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (\neg p \vee q) \to p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \vee p \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee p \overset{\text{בליעה}}{\equiv} p$$

4) $(((p \to q) \to p) \to q) \equiv p \to q$

דרך ב' (הארוכה):

$$(((p \to q) \to p) \to q) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} ((\neg p \vee q) \to p) \to q \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \to q \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$$

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg(\neg(\neg p \vee q)) \wedge \neg p) \vee q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee q \overset{\text{בליעה}}{\equiv}$$

$$\neg p \vee q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} p \to q$$

5) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \equiv T$

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \to (\neg p \vee r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$$

$$\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r) \overset{\text{חילוף}}{\equiv}$$

$$((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee ((q \wedge \neg r) \vee r) \overset{\text{פילוג}}{\equiv} [\underset{T}{(p \vee \neg p)} \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge \underset{T}{(r \vee \neg r)}] \overset{\text{טאוטולוגיה, זהות}}{\equiv}$$

$$(\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) \overset{\text{קיבוץ}}{\equiv} (q \vee \neg q) \vee (\neg p \vee r) \overset{\text{טאוטולוגיה}}{\equiv} (\neg p \vee r) \vee T \overset{\text{שליטה}}{\equiv} T$$

18.11.19

דיסקרטית - תירגול

תרגיל

פשטו את הפסוקים:

1) $((p\to q)\to \neg q)\to \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} ((\neg p\vee q)\to \neg q)\to \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(\neg(\neg p\vee q)\vee \neg q)\vee \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$

$\neg(\neg(\neg p\vee q)\vee \neg q)\vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg((p\wedge \neg q)\wedge q)\vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$ ~~...~~ $\equiv$

$((\neg p\vee q)\wedge q)\vee \neg p \overset{\text{בליעה}}{\equiv} q\vee \neg p$

2) $((p\to q)\to(q\to r))\to(p\to r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$

$(\neg\neg(\neg p\vee q)\wedge \neg(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r) \overset{\text{שלילה כפולה, דה מורגן}}{\equiv} ((\neg p\vee q)\wedge(q\wedge \neg r))\vee(\neg p\vee r) \overset{\text{קיבוץ}}{\equiv}$

$(((\neg p\vee q)\wedge q)\wedge \neg r)\vee(\neg p\vee r) \overset{\text{בליעה}}{\equiv} (q\wedge \neg r)\vee(\neg p\vee r) \overset{\text{חילוף וקיבוץ}}{\equiv}$

$((q\wedge \neg r)\vee r)\vee \neg p \overset{\text{פילוג}}{\equiv} ((q\vee r)\wedge \underbrace{(\neg r\vee r)}_{T})\vee \neg p \overset{\text{טאוטולוגיה וזהות}}{\equiv} (q\vee r)\vee \neg p$

הוכח

1) $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r) \equiv (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

$((p\wedge q)\vee(q\wedge r))\vee(\neg p\wedge r) \equiv ((p\vee r)\wedge q)\vee(\neg p\wedge r) \equiv ((p\vee r)\vee(\neg p\vee r))\wedge((\neg p\wedge r)\vee q) \equiv$

$((p\vee \neg p)\vee(r\vee r))\wedge((\neg p\wedge r)\vee q) \equiv (T\vee r)\wedge((\neg p\wedge r)\vee q) \equiv$

$r\wedge((\neg p\wedge r)\vee q) \equiv (r\wedge(\neg p\wedge r))\vee(r\wedge q) \equiv (r\wedge \neg p)\vee(r\wedge q)$

הוכחה

$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r) \overset{\text{זהות}}{\equiv} (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(T\wedge(q\wedge r)) \overset{\text{טאוטולוגיה}}{\equiv}$

$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee((\neg p\vee p)\wedge(q\wedge r)) \overset{\text{פילוג}}{\equiv} (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r) \overset{\text{חילוף וקיבוץ}}{\equiv}$

$(p\wedge q)\vee((p\wedge q)\wedge r)\vee(\neg p\wedge r)\vee((\neg p\wedge r)\wedge q) \overset{\text{בליעה}}{\equiv} (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

צורה נורמלית DNF או CNF

נתון

p	q	r	G	$p\wedge\neg q\wedge r$	$\neg p\wedge q\wedge r$	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	T	T		
T	F	F	F			
F	T	T	T		T	
F	T	F	F			
F	F	T	F			
F	F	F	T			T

בצורת DNF (רק ערכי ה-T)

I $(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)=G$

*לכל ערך T מסתכלים על המשתנים p,q,r.

אם ערך המשתנה T מעתיקים אותו.
אם ערך המשתנה F כותבים את השלילה.

בין המשתנים יש קשר <u>וגם</u> ובין ערכי T של G(p,q,r) יש קשר <u>או</u>.

בצורת CNF (רק ערכי ה-F).

II $(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)=G$

*לכל ערך F מסתכלים על המשתנים p,q,r

אם ערך המשתנה F מעתיקים אותו
אם ערך המשתנה T כותבים את השלילה.

בין המשתנים יש קשר <u>או</u> ובין ערכי F של G(p,q,r) יש קשר <u>וגם</u>.

הערה

I ו- II שקולים לוגית.

תרגיל

1) כתוב פסוק שמקבל ערך T אמ"מ כל המשתנים p,q,r שווים.

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

(כאשר כולם שווים ל-T) (כאשר כולם שווים ל-F) → שיטת DNF

2) כתוב פסוק אמת שמקבל ערך T אמ"מ רב המשתנים הם T.

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ → שיטת DNF.

3) כתוב פסוק שמקבל ערך T אמ"מ $p = q \to r$

p	q	r	$q \to r$	G
T	T	T	T	T →
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T →
T	F	F	T	T →
F	T	T	T	F
F	T	F	F	T →
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ → DNF

$\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$ → CNF

25.11.19

דיסקרטית - תירגול

DNF & CNF

דף

13) א) $(p\wedge q\wedge \neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge \neg r)$

אפשר מיידית לעבור לכאן

ב) $\overset{\text{פילוג}}{\equiv}$ $((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r))\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\overset{\text{פילוג}}{\equiv}$

$(q\wedge((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg r)))\equiv$ טאוטולוגיה + זהות

$q\wedge((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge(r\vee\neg r)))\equiv$ פילוג

$q\wedge((p\wedge\neg r)\vee\neg p)\equiv$ טאוטולוגיה + זהות

$q\wedge((p\vee\neg p)\wedge(\neg p\vee\neg r))\equiv$ דה מורגן

$q\wedge(\neg p\vee\neg r)\equiv$

$q\wedge\neg(p\wedge r)$ משל

ג) $G(\neg p,q,\neg p)\overset{\text{הצבה בסעיף ב'}}{\equiv} q\wedge\neg(\neg p\wedge\neg p)\overset{\text{כפילות}}{\equiv} q\wedge\neg(\neg p)\overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} q\wedge p$

$G(p,\neg p,p)\equiv\neg p\wedge\neg(p\wedge p)\overset{\text{כפילות}}{\equiv}\neg p\wedge\neg p\overset{\text{כפילות}}{\equiv}\neg p$

* **הסבר**

$G(p,q,r)$ - מציבים את הערכים של p לתוך p, q לתוך q ו-r לתוך r. כך שאם היה את הפסוק $(p\wedge q)\vee\neg r$ ו $G(a,b,c)$ היינו מציבים והפסוק היה נראה כך: $(a\wedge b)\vee\neg c$. את הפסוק הזה אחר כך נפשט עוד אם יהיה אפשר.

14) א) $(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\overset{\text{פילוג}}{\equiv}$

ב) $\neg p\vee((\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(q\vee\neg r))\overset{\text{פילוג}}{\equiv}$

$\neg p\vee((\neg q\vee(\neg r\wedge r))\wedge(q\vee\neg r))\equiv$ סתירה וזהות

$\neg p\vee(\neg q\wedge(q\vee\neg r))\overset{\text{פילוג}}{\equiv}$

$\neg p\vee((\neg q\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg r))\equiv$ סתירה וזהות

$\neg p\vee(\neg q\wedge\neg r)\equiv$ סתירה

$p\rightarrow(\neg q\wedge\neg r)$

ג) $p \to (\neg q \wedge \neg r)$

(שלילה כפולה, כפילות, גרירה)

$$G(\neg p, \neg q, \neg q) \equiv \neg p \to (\neg(\neg q) \wedge \neg(\neg q)) \equiv \neg p \to (q \wedge q) \equiv \neg p \to q \equiv p \vee q$$

(גרירה, בליעה)

$$G(p, p, q) \equiv p \to (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p$$

קבוצות

קבוצה היא אוסף של איברים בתוך סוגריים מסולסלים.

נסמן קבוצה באות גדולה.

$\forall x \; x \in A \to x \in B$

$\emptyset$

F →

דוגמאות

1) $A = \{2, 4, 5, 7\}$ $\qquad A \neq B$

2) $B = \{2, \{4\}, 5, 7\}$

3) $C = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$ "כך ש"

הגדרה

איבר x שייך לקבוצה A אם x הוא אחד האיברים שנמצאים ב- A.

נסמן $x \in A$ שייך ו- $x \notin A$ לא שייך.

דוגמאות

א) $A = \{2, 4, 5, 7\}$

1) $2 \in A$
2) $3 \notin A$
3) $4 \in A$
4) $5 \in A$
5) $6 \notin A$
6) $7 \in A$
7) $8 \notin A$
8) $\{2\} \notin A$

ב) $B = \{2, \{4\}, 5, 7\}$

1) $2 \in B$
2) $\{2\} \notin B$
3) $4 \notin B$
4) $\{4\} \in B$
5) $5 \in B$
6) $\{5, 7\} \notin B$
7) $\{2, \{4\}\} \notin B$
8) $\{\{4\}\} \notin B$

הגדרה

קבוצה ריקה היא קבוצה בלי איברים. לאות אומרת $\{\}$ וסימון $\emptyset=\{\}$.

דוגמאות

I $A=\{2,4,5,7\}$

1) $\emptyset\notin A$

2) $\{\emptyset\}\notin A$

3) $\{\emptyset,2\}\notin A$

II $B=\{\emptyset,2,4,5,7\}$

1) $\emptyset\in B$

2) $\{\emptyset\}\notin B$

3) $\{\emptyset,2\}\notin B$

III $C=\{\emptyset,\{\emptyset,2\},\{1,2\},3\}$

1) $\emptyset\in C$

2) $\{\emptyset\}\notin C$

3) $\{\emptyset,2\}\in C$

4) $\{\emptyset,\{2\}\}\notin C$

5) $2\notin C$

6) $\{2\}\notin C$

7) $\{1,3\}\notin C$

8) $\{1\}\notin C$

9) $3\in C$

10) $\{3\}\notin C$

IV $D=\{\{\emptyset\},\{1,\emptyset\},\{1\},1\}$

קבע נכון או לא נכון

1) $\emptyset\in D$ F

2) $\{\emptyset\}\in D$ T

3) $\{1,\{1,\emptyset\}\}\in D$ F

4) $\{1,\{1\}\}\in D$ F

5) $\{1,\emptyset\}\in D$ T

6) $\{\{\emptyset\}\}\in D$ F

7) $\{\emptyset,\{1\}\}\in D$ F

8) $A\in A$ F

9)

10)

2.12.19

דיסקרטית - תרגול

תזכורת לקבוצות

איבר x שייך לקבוצה A אם x אחד מהאיברים שנמצא ב- A.
סימון $x \in A$, ($x \notin A$ לא שייך).

הגדרה

יהיו A,B קבוצות.
קבוצה B מוכלת בקבוצה A אם <u>לכל</u> איבר $x \in B$ מתקיים $x \in A$.
סימון $B \subseteq A$ ($B \nsubseteq A$ לא מוכל).

דוגמאות

1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$ $\leftarrow$ $B \subseteq A,\ A \nsubseteq B,\ B \notin A$.

2) $A=\{1,\{1\}\}$, $B=\{1\}$ $\leftarrow$ $\underset{x=1}{B \subseteq A},\ \underset{B=\{1\}}{B \in A},\ A \nsubseteq B$

3) $A=\{\{1\}\}$, $B=\{1\}$ $\leftarrow$ $B \nsubseteq A,\ B \in A,\ A \nsubseteq B$

4) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ $\leftarrow$ $B \nsubseteq A,\ B \notin A,\ A \nsubseteq B$

משפט

לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$ (קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה).

הוכחה

$$\underbrace{x \in \emptyset}_{F} \rightarrow x \in A$$
$$F \rightarrow x \in A \equiv T$$

תרגיל

קבע אם נכון/לא נכון ונמק.

$\emptyset \in \{1,2,3\}$	F	$\{1,2\} \in \{\emptyset,1,2,3\}$	F	$\{\{1\}\} \in \{\emptyset,\{1\}\}$	F
$\emptyset \in \{1,2,3\}$	T	$\{1,2\} \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$	T	$\{\{1\}\} \subseteq \{\emptyset,\{1\}\}$	T
$1 \subseteq \{1,2,3\}$	F	$\{\{1\},\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$	F	$\{1,\{1\}\} \in \{\{1\}\}$	[illegible]
$\emptyset \in \{\emptyset,1,2,3\}$	T	$\{\emptyset,1\} \in \{\{\emptyset\},\{1\}\}$	F	$\{1,\{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$	[illegible]
$\emptyset \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$	T	$\{\emptyset,1\} \subseteq \{\{\emptyset\},\{1\}\}$	F	$\{1,2\} \in \{1,\{1,2\}\}$	[illegible]
$\{\emptyset\} \in \{\emptyset,1,2,3\}$	F	$\{\{\emptyset\},\{1\}\} \subseteq \{\emptyset,1\}$	F	$\{1,2\} \subseteq \{1,\{1,2\}\}$	[illegible]
$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$	T	$\{\{\emptyset\},\{1\}\} \in \{\emptyset,1\}$	F	$\{\{1\},\{2\}\} \in \{1,2\}$	[illegible]
$\{\{1\},\{2\}\} \subseteq \{1,2\}$	F	$\{1,2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$	F	$\{\{1,2\}\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$	[illegible]

F $\{\{1,2\}\} \in \{\{1\},\{2\}\}$

פעולות על קבוצות

איחוד $A\cup B$

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ או $x\in B\}$

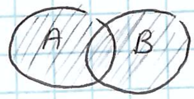
דוגמאות

1) $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

2) $A=\{1,\{2\}\}$, $B=\{\{1\},2\}$, $A\cup B=\{1,\{2\},\{1\},2\}$

3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ $(B\subseteq A)$ $A=A\cup B=\{1,2,3\}$

4) $A\cup B$



תכונות של איחוד

1) $A\cup B=B\cup A$

2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

3) $A\cup A=A$

4) $A\cup\emptyset=A$

5) אם $B\subseteq A$ אז $A\cup B=A$

6) $A\subseteq A\cup B$, אם $x\in A$ אז $x\in A\cup B$

7) $B\subseteq A\cup B$, אם $x\in B$ אז $x\in A\cup B$

8) אם $x\in A\cup B$ אז $x\in A$ או $x\in B$

9) אם $x\in A$ או $x\in B$ אז $x\in A\cup B$

חיתוך $A\cap B$

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ וגם $x\in B\}$ (כל האיברים המשותפים ל-A ו-B).

דוגמאות

1) $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $A\cap B=\{1\}$

2) $A=\{1,\{2\}\}$, $B=\{\{1\},2\}$, $A\cap B=\emptyset$

3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $A\cap B=\{1,2\}$

4) $A\cap B$ 

תכונות של חיתוך

1) $A\cap B=B\cap A$

2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3) $A\cap A=A$

4) $A\cap\emptyset=\emptyset$

5) אם $B\subseteq A$ אז $A\cap B=B$

6) $A\cap B\subseteq A$, אם $x\in A\cap B$ אז $x\in A$

7) $A\cap B\subseteq B$, אם $x\in A\cap B$ אז $x\in B$

8) אם $x\in A\cap B$ אז $x\in A$ וגם $x\in B$

9) אם $x\in A$ וגם $x\in B$ אז $x\in A\cap B$.

10) $A\cap B\subseteq A\cup B$

11) חוק הפילוג:

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

הערה

בקבוצות אנו נשתמש בחוק הבליעה.

הפרש

$A\setminus B$ או $A-B$

$$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$$

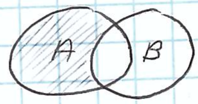
דוגמאות

1) $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $A\setminus B=\{2,4\}$, $B\setminus A=\{3,5\}$

2) $A=\{1,\{2\}\}$, $B=\{\{1\},2\}$, $A\setminus B=\{1,\{2\}\}=A$, $B\setminus A=\{\{1\},2\}=B$

3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $A\setminus B=\{3\}$, $B\setminus A=\emptyset$

4) $A\setminus B$



תכונות של הפרש

1) $A\setminus B\subseteq A$ אם $x\in A\setminus B$ אז $x\in A$.

2) אם $x\in A\setminus B$ אז $x\in A$ וגם $x\notin B$

3) אם $x\in A\setminus B$ אז $x\notin B$

4) $A\setminus A=\emptyset$

5) $A\setminus\emptyset=A$

6) $\emptyset\setminus A=\emptyset$

7) אם $B\subseteq A$ אז $B\setminus A=\emptyset$

משלים

$\bar{A}$ (כאשר U זה העולם).

(כל קבוצה A מתקיים $A\subseteq U$).

$$\bar{A}=\{x\in U \mid x\notin A\}=U\setminus A$$

דוגמאות

הערה! בהוכחה לא צריך לציין עולם, בדוגמא כן.

$U=\{1,2,3,4,5\}$

1) $A=\{1,4\}$, $\bar{A}=\{2,3,5\}$

2) $A=\{2,3,5\}$, $\bar{A}=\{1,4\}$

תכונות של משלים

1) $\bar{A}=U\setminus A$

2) אם $x\in A$ אז $x\notin\bar{A}$

3) אם $x\in\bar{A}$ אז $x\notin A$

4) $\bar{\emptyset}=U$

5) $\bar{U}=\emptyset$

6) $\overline{(\bar{A})}=A$

7) $A\cup\bar{A}=U$

לכל $x\in U$ מתקיים $x\in\bar{A}$ או $x\in A$

8) $A\cap\bar{A}=\emptyset$

9) דה מורגן:

10) $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\quad A\setminus B=A\cap\bar{B}$

11) $\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$ $\quad A\setminus\bar{A}=A$

דוגמא לדה מורגן עם משלים (9)

$U=\{1,2,3,4,5\}$

$A=\{1,3\}$ $\quad B=\{1,2,4\}$

$\bar{A}=\{2,4,5\}$ $\quad \bar{B}=\{3,5\}$

$A\cap B=\{1\}$ $\quad \overline{A\cap B}=\{2,3,4,5\}$

$\parallel$

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{2,3,4,5\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$, $\overline{A\cup B}=\{5\}$

$\parallel$

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{5\}$

9.12.19

דיסקרטית - תירגול

תרגיל

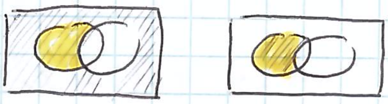
הוכח או הפרך:

1) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

$A \setminus (A \cap B) \overset{\text{הפרש}}{=} A \cap \overline{(A \cap B)} \overset{\text{דה מורגן}}{=} A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \overset{\text{פילוג}}{=} (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) =$

$A \cap \bar{B} \overset{\text{דה מורגן}}{=} A \setminus B$

2) $\bar{B} \setminus \bar{A} = A \setminus B$



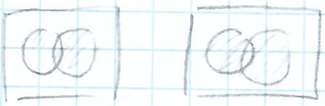
$\bar{B} \setminus \bar{A} \underset{\text{הפרש}}{=} \bar{B} \cap A \overset{\text{חילוף}}{=} A \cap \bar{B} \overset{\text{הפרש}}{=} A \setminus B$

3) $(A \cup B) \setminus B = A$

$A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$

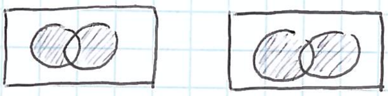
$(A \cup B) = \{1,2\} \setminus \{2\} = \{1\} \neq \{1,2\}$

4) $(A - B) \cup B = A \cup B$



$(A \setminus B) \cup B \overset{\text{הפרש}}{=} (A \cap \bar{B}) \cup B \overset{\text{פילוג}}{=} (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) \overset{\text{עולם}}{=} (A \cup B) \cap U \overset{\text{זהות}}{=} A \cup B$

5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

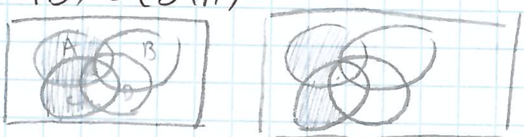


$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \overset{\text{הפרש}}{=} (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \overset{\text{פילוג}}{=} ((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cup B) \cap \bar{B}) \overset{\text{פילוג}}{=}$

$((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)) \cup ((\bar{B} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A)) \overset{\text{קבוצה ריקה}}{=} ((\bar{A} \cap B) \cup \emptyset) \cup (\emptyset \cup (\bar{B} \cap A)) \overset{\text{זהות}}{=}$

$(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) \overset{\text{חילוף}}{=} (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \overset{\text{הפרש}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

6) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$



$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{D}) = (A \cup (C \cap \bar{D})) \cap (\bar{B} \cup (C \cap \bar{D})))$

$((A \cup C) \cap (A \cup \bar{D})) \cap ((\bar{B} \cup C) \cap (\bar{B} \cup \bar{D}))$

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, $C = \{3,4\}$, $D = \{1,2\}$

$\{1,2,3,4\} \neq \{3,4\}$

7) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) \overset{\text{הפרש}}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) \overset{\text{חילוף}}{=} (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) \overset{\text{דה מורגן}}{=}$

$(A \cap C) \cap \overline{(B \cup D)} \overset{\text{הפרש}}{=} (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

8) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$

$A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$, $C = \{2,3\}$, $D = \{3\}$

$(\{1,2\} \setminus \{2\}) \cap (\{2,3\} \setminus \{3\}) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$

לא שווה

$(\{1,2\} \cap \{2,3\}) \setminus (\{2\} \cap \{3\}) = \{2\} \setminus \emptyset = \{2\}$

9)

לינארית - תירגול

9.12.19

תזכורת

1) יהי $A_{n\times n}$ מטריצה נקראת מטריצה הפיכה אם קיימת מטריצה $B_{n\times n}$ כך ש $B\cdot A=I$, $A\cdot B=I$, נסמן $A^{-1}=B$ ההופכית.

2) תכונות של מטריצות נתון $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$ מטריצות הפיכות ונתון k מספר.

א) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ וגם $A\cdot B$ הפיכה.

ב) $(A^{-1})^{-1}=A$

ג) $(K\cdot A)^{-1}=\frac{1}{K}\cdot A^{-1}$

ד) $(A^{t})^{-1}=(A^{-1})^{t}$

הוכחה

א) $(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) \overset{\text{קיבוץ}}{=} A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} A\cdot I\cdot A^{-1} \overset{\text{יחידה}}{=} A\cdot A^{-1} \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} I$

ומשל. $(B^{-1}A^{-1})(A\cdot B) \overset{\text{קיבוץ}}{=} B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} B^{-1}\cdot I\cdot B \overset{\text{יחידה}}{=} B^{-1}\cdot B \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} I$

לפי הגדרה, $A\cdot B$ הפיך ומתקיים $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

ב) נתון A הפיכה. ולכן מתקיים $A\cdot A^{-1}=I$ וגם $A^{-1}\cdot A=I$.
נסתכל על A^{-1} אז ההופכי של (A^{-1}) היא A, כלומר $(A^{-1})^{-1}=A$

ג) $(K\cdot A)\cdot(\frac{1}{K}\cdot A^{-1}) \overset{\text{חילוף במס'}}{=} K\cdot\frac{1}{K}\cdot A\cdot A^{-1} \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} 1\cdot I \overset{\text{יחידה}}{=} I$

$(\frac{1}{K}\cdot A^{-1})(K\cdot A) \overset{\text{חילוף במס'}}{=} \frac{1}{K}\cdot K\cdot A^{-1}\cdot A \overset{\text{הגדרת הופכית}}{=} 1\cdot I \overset{\text{יחידה}}{=} I$

לכן, $(KA)^{-1}=(\frac{1}{K}\cdot A^{-1})$

ד) A הפיכה ולכן קיימת A^{-1} כך שמתקיים $A\cdot A^{-1}=I$ וגם $A^{-1}\cdot A=I$.

(I) $A\cdot A^{-1}=I \xrightarrow[\text{שיחלוף משני הצדדים}]{} (A\cdot A^{-1})^{t}=I^{t} \xrightarrow[\text{תכונה של שיחלוף}]{} (A^{-1})^{t}\cdot A^{t}=I$

(II) $A^{-1}\cdot A=I \longrightarrow (A^{-1}\cdot A)^{t}=I^{t} \longrightarrow A^{t}\cdot(A^{-1})^{t}=I$

מכאן, אנו מקבלים ש $(A^{t})^{-1}=(A^{-1})^{t}$ כי הוכחנו הופכיות.

מתרגל
של שבוע
שעבר.

12) נתון A,B $n\times n$ מטריצות הפיכות. הוכח:

א) A,B מתחלפות $\longleftrightarrow$ A^{-1},B^{-1} מתחלפות

ב) A,B מתחלפות $\longleftrightarrow$ $(AB)^2=A^2B^2$

<u>הוכחה</u>

א) נתון A,B מתחלפות ($AB=BA$) ונוכיח A^{-1},B^{-1} מתחלפות ($A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

$$A^{-1}B^{-1} \underset{\text{תכונת הפיכות}}{=} (B\cdot A)^{-1} \underset{\text{נתון}}{=} (A\cdot B)^{-1} \underset{\text{תכונת הופכיות}}{=} B^{-1}\cdot A^{-1}$$

נתון $B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ ונוכיח ש $AB=BA$.

$$A\cdot B \underset{\text{שוויון (תכונה)}}{=} ((AB)^{-1})^{-1} \underset{\text{תכונה}}{=} (B^{-1}A^{-1})^{-1} \underset{\text{נתון}}{=} (A^{-1}B^{-1})^{-1} \underset{\text{תכונה}}{=} ((BA)^{-1})^{-1} \underset{\text{תכונה}}{=} BA$$

הוכחנו ששני הכיוונים מתקיימים, לכן מתקיים אמ"מ.

ב) נתון $AB=BA$ ונוכיח $(AB)^2=A^2B^2$

$$(AB)^2 \underset{\text{הגדרה}}{=} (AB)(AB) \underset{\text{קיבוץ}}{=} A(BA)B \underset{\text{נתון מתחלפות}}{=} A(AB)B \underset{\text{קיבוץ והגדרה}}{=} A^2B^2$$

נתון $(AB)^2=A^2B^2$ ונוכיח $AB=BA$

$$(AB)^2=A^2B^2 \underset{\text{נכפול ב } A^{-1},B^{-1}}{\longrightarrow} A^{-1}\underset{(AB)(AB)}{(AB)^2}B^{-1}=A^{-1}A^2B^2B^{-1} \longrightarrow I\cdot BA\cdot I = I\cdot AB\cdot I \Rightarrow BA=AB$$

<u>דטרמיננטה</u>

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

<u>תרגילים</u>

1) א) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 1-2\cdot 3=-2$

ד) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3-0=3$

ב) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 1-2\cdot 2=0$

ה) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-4)=4$

ג) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0=1$

2) א) $\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 4 & t+2 \end{vmatrix} \Rightarrow (t-1)(t+2)=4$

$t^2+t-2-4=0$

$t^2+t-6=0$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}-3=t\\2=t\end{cases}$

3)

דרך א

$|C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

פיתוח לפי שורה 1

$=(4-10)+(2+5)+4\cdot(4+4)=-6+7+32=33$

דרך ב

$|C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (2+5)+4(1+4)-2(5-8)=$

פיתוח לפי עמודה 2

$=7+20+6=33.$

דרך ג
רק על 3x3

מעתיקים 2 עמודות ראשונות

$|C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{matrix} = [1\cdot4\cdot1+(-1)\cdot5\cdot(-1)+4\cdot2\cdot2]-[(-1)\cdot2\cdot1+1\cdot5\cdot2+4\cdot4\cdot(-1)]=$

$=4+5+16-(-2+10-16)=25+8=33.$

3)

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4)+(-1)(-4)=-8+4=-4.$

שורה 1

(היה חכם לפי עמודה 3)

4)

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & t-1 & -1 \\ t-2 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = -(t-1)\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} = (-t+1)((t-2)(t-1)-12)=0$

לפי עמודה 2

$t=1$

$t^2-3t-10=0$

$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm7}{2}=\begin{cases}5\\-2\end{cases}$

$t_1=1$

$t_2=5$

$t_3=-2$

16.12.19

דיסקרטית - תירגול

תרגיל

הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית:

1) $A\setminus B = A\cap\bar{B}$

פתרון

צ"ל: I $A\setminus B \subseteq A\cap\bar{B}$

II $A\cap\bar{B} \subseteq A\setminus B$

הוכחה

I נתון $x\in A\setminus B$ צ"ל $x\in A\cap\bar{B}$.

$x\in A\setminus B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A \wedge x\in\bar{B} \Rightarrow x\in A\cap\bar{B}$

(הגדרת הפרש; הגדרת משלים; לפי הגדרת חיתוך)

II נתון $x\in A\cap\bar{B}$ צ"ל $x\in A\setminus B$.

$x\in A\cap\bar{B} \Rightarrow x\in A \wedge x\in\bar{B} \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A\setminus B$

(הגדרת חיתוך; הגדרת משלים; הגדרת הפרש)

2) אם $A\cup B=A$ אז $B\subseteq A$

פתרון

I נתון $A\cup B=A$ צ"ל $B\subseteq A$

II $x\in B$ צ"ל $x\in A$

הוכחה

$x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$

($B\subseteq A\cup B$; $A\cup B=A$)

3) אם $A\cup B=A$ אז $A=B$

פתרון

נתון $A\cup B=A$ צ"ל $A=B$.

צ"ל I $A\subseteq B$

II $B\subseteq A$

הוכחה

I נתון $x\in B$ צ"ל $x\in A$

$x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$

($B\subseteq A\cup B$; $A=A\cup B$)

II נתון $x \in A$ צ"ל $x \in B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$

$A \subseteq A \cup B$ הגדרת איחוד

לא ניתן לקבל $x \in B$
לכן ניתן דוגמא נגדית

הוכחה נגדית

$A = \{1,2\}, B = \{1\}$ אז נקבל ש $A \cup B = \{1,2\} = A$ אבל, $A \neq B$.

4) אם $A \cap B = A$ אז $A \subseteq B$

פתרון

נתון I $A \cap B = A$ צ"ל $A \subseteq B$

נתון II $x \in A$ צ"ל $x \in B$

הוכחה

$x \in A \Longrightarrow x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow x \in B$

$A \cap B = A$ הגדרת חיתוך   x איבר משותף ל-A ו-B. $(A \cap B \subseteq B)$

5) אם $A \cap B = A$ אז $A = B$

פתרון

נתון $A \cap B = A$ צ"ל $A = B$

צ"ל I $A \subseteq B$

צ"ל II $B \subseteq A$

הוכחה

I נתון $x \in A$ צ"ל $x \in B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$

$A \cap B = A$ הגדרת חיתוך

II נתון $x \in B$ צ"ל $x \in A$

$x \in B \Rightarrow$ לא ניתן להמשיך
ניתן דוגמא נגדית.

הוכחה נגדית

$A = \{1\}, B = \{1,2\}$ אז נקבל ש $A \cap B = \{1\} = A$ אבל $A \neq B$

כדי להוכיח שקבוצה ריקה מניחים בשלילה שהיא לא ריקה

(6 אם $A\setminus B=A$ אז $B=\emptyset$

פתרון

נתון $A\setminus B=A$ צ"ל $B=\emptyset$

הוכחה

נניח בשלילה ש $B\neq\emptyset$. אז קיים $x\in B$.

$$x\in B \Rightarrow x\notin \bar{B} \Rightarrow x\notin A\cap\bar{B} \Rightarrow x\notin A\setminus B \Rightarrow x\notin A$$

(הגדרת משלים; הגדרת הפרש; $A\setminus B=A$)

לא קיבלנו סתירה, נחפש דוגמא נגדית.

הוכחה נגדית

$A=\{1\}, B=\{2\}$, אז נקבל ש $A\setminus B=\{1\}=A$ אבל $B\neq\emptyset$.

(7 אם $A\setminus B=A$ אז $A\cap B=\emptyset$

פתרון

נתון $A\setminus B=A$ צ"ל $A\cap B=\emptyset$

הוכחה

נניח בשלילה ש $A\cap B\neq\emptyset$, כלומר קיים $x\in A\cap B$

אם $x\in A\cap B$ אז $x\notin A\setminus B$

$$x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin A\setminus B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin A \Rightarrow x\in A\wedge x\in\bar{A}$$

(הגדרת חיתוך; הפרש $A=A\setminus B$; הגדרת משלים)

$$\Rightarrow x\in A\cap\bar{A} \Rightarrow x\in\emptyset$$

(הגדרת חיתוך) סתירה!

מכאן שהגענו לסתירה, אנו יודעים ש $A\cap B=\emptyset$.

(8 אם $A\setminus B=\emptyset$ אז $A\subseteq B$

פתרון

נתון I $A\setminus B=\emptyset$ צ"ל $A\subseteq B$

נתון II $x\in A$ צ"ל $x\in B$

הוכחה

$$x\in A \Rightarrow x\in A \wedge x\in U \Rightarrow x\in A \wedge x\in B\cup\bar{B} \Rightarrow x\in A\wedge(x\in B \vee x\in\bar{B}) \Rightarrow$$

($A\cap U=A$; $B\cup\bar{B}=U$; פילוג)

$$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in\bar{B}) \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\cap\bar{B}) \Rightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee x\in A\setminus B \Rightarrow$$

(הגדרת חיתוך; נתון $\emptyset=A\setminus B$)

$$(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in\emptyset \Rightarrow x\in B$$

(סתירה; הגדרת חיתוך) מש"ל.

9) אם $A\setminus B=\emptyset$ אז $A=B$

פתרון

נתון $A\setminus B=\emptyset$ צ"ל $A=B$

צ"ל I $A\subseteq B$

צ"ל II $B\subseteq A$

הוכחה

I נתון $x\in A$ צ"ל $x\in B$

הוכחנו בתרגיל קודם.

II נתון $x\in B$ צ"ל $x\in A$.

$$x\in B \Longrightarrow x\in B\wedge x\in U \Longrightarrow x\in B\wedge(x\in A\cup\bar{A}) \Longrightarrow x\in B\wedge(x\in A\vee x\in\bar{A}) \overset{\text{פילוג}}{\Longrightarrow}$$

($A\cap U=A$, $U=A\cup\bar{A}$, הגדרת איחוד)

$$(x\in B\wedge x\in A)\vee(x\in B\wedge x\in\bar{A}) \Longrightarrow x\in B\cap A\vee x\in B\setminus A$$

הוכחה נגדית

$A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$, אז נקבל ש $A\setminus B=\emptyset$. אבל $A\neq B$.

10) אם $A\cup B=U$ אז $\bar{B}\subseteq A$

פתרון

נתון $A\cup B=U$ צ"ל $\bar{B}\subseteq A$

נתון $x\in\bar{B}$ צ"ל $x\in A$

עדיף להעביר לקבוצות ולא לעבוד לפי הפסוקים. כדי לראות קבוצה ריקה (משוואה... כג)

הוכחה

$$x\in\bar{B} \Longrightarrow x\in\bar{B}\wedge x\in U \Longrightarrow x\in\bar{B}\wedge(x\in A\cup B) \Longrightarrow x\in\bar{B}\wedge(x\in A\vee x\in B) \overset{\text{פילוג}}{\Longrightarrow}$$

($A\cap U=A$, $A\cup B=U$, הגדרת איחוד)

$$(x\in\bar{B}\wedge x\in A)\vee\underbrace{(x\in\bar{B}\wedge x\in B)}_{\emptyset} \Longrightarrow x\in\bar{B}\wedge x\in A \Longrightarrow x\in A$$

$x\in B\cap\bar{B}$ ($\emptyset$) $\vee$ $x\in\bar{B}\cap A$; $A\vee\emptyset=A$; x משותף. הגדרת חיתוך

11) אם $A\cup B=U$ אז $\bar{B}=A$

פתרון

נתון $A\cup B=U$ צ"ל $\bar{B}=A$

צ"ל I $\bar{B}\subseteq A$, II $A\subseteq\bar{B}$

הוכחה

צ"ל I) הראנו בתרגיל קודם

II) נתון $x\in A$ נוכיח $x\in\bar{B}$

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in U\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\cup\bar{B})\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in\bar{B})\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in\bar{B})$$

הוכחה נגדית

$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1\}$, $U=\{1,2,3,4\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4\}=U$, $A\neq\bar{B}=\{2,3,4\}$

23.12.12

דיסקרטית - תירגול

הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית:

1 (א) $(A\cup B)\setminus(A\cup C)=B\setminus(A\cup C)$

__פתרון__

$(A\cup B)\setminus(A\cup C)\overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow}(A\cup B)\cap(\overline{A\cup C})\overset{\text{דה מורגן}}{\Rightarrow}(A\cup B)\cap(\bar A\cap\bar C)\overset{\text{פילוג}}{=}(A\cap(\bar A\cap\bar C))\cup(B\cap(\bar A\cap\bar C))$

$\overset{\text{קיבוץ}}{\Rightarrow}((A\cap\bar A)\cap\bar C)\cup(B\cap(\bar A\cap\bar C))\Rightarrow(\emptyset\cap\bar C)\cup(B\cap(\bar A\cap\bar C))\Rightarrow\emptyset\cup(B\cap(\bar A\cap\bar C))\Rightarrow$

$B\cap(\bar A\cap\bar C)\overset{\text{דה מורגן}}{\Rightarrow}B\cap(\overline{A\cup C})\overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow}B\setminus(A\cup C)$

1(ב) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)\subseteq A\setminus B$ אז $B\subseteq A$ אם

$x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)\Rightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(\bar A\cup\bar B)\Rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in\bar A\vee x\in\bar B)$

$\Rightarrow(x\in A\vee x\in A)\wedge(x\in\bar A\vee x\in\bar B)\Rightarrow(\underbrace{x\in A\wedge x\in\bar A}_{\emptyset})\vee(x\in A\wedge x\in\bar B)\Rightarrow$

$\Rightarrow\emptyset\vee(x\in A\wedge x\in\bar B)\Rightarrow x\in A\cap\bar B\Rightarrow x\in A\setminus B.$

(ג) $(A\cup B)\cap(C\setminus A)=(B\setminus A)\cap C$

$(A\cup B)\cap(C\cap\bar A)\Rightarrow((\underbrace{\bar A\cap A}_{\emptyset})\cup(\bar A\cap B))\cap C\Rightarrow(B\cap\bar A)\cap C\Rightarrow(B\setminus A)\cap C$

(ד) $A\cap C=\emptyset$ אז $(A\setminus B)\setminus C=(A\cap(\bar B\cup C))$ אם

$x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\cup\bar B\Rightarrow x\in A\cap(\bar B\cup C)\Rightarrow$

$\overset{\text{נתון}}{\Rightarrow}x\in(A\setminus B)\setminus C\Rightarrow x\in(A\setminus B)\wedge x\notin C$

$(B\cap\bar C)$

$A\cap(\bar B\cup C)$

נתון ש $x\in C$ סתירה, לכן $A\cap C=\emptyset$

(ה) $A\cap C=\emptyset$ אז $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$ אם

נניח בשלילה ש $A\cap C\neq\emptyset$ ולכן קיים $x\in A\cap C$

$x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\in A\wedge(x\in C\vee x\in\bar B)\Rightarrow x\in A\wedge(x\in\bar B\cup C)$

$x\in A\cap(\bar B\cup C)\Rightarrow x\in A\setminus(B\cap\bar C)\Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)\overset{\text{נתון}}{\Rightarrow}x\in(A\setminus B)\setminus C\Rightarrow$

$(x\in A\cap\bar B)\wedge x\notin C$

נתון ש $x\in C$ סתירה, לכן $A\cap C=\emptyset$

$x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\notin(A\setminus B)\setminus C\Rightarrow x\notin A\setminus(B\setminus C)\Rightarrow x\in\overline{A\setminus(B\setminus C)}\Rightarrow$

$x\in\overline{A\cap(\overline{B\setminus C})}\Rightarrow x\in\overline{A\cap(\overline{B\cap\bar C})}\Rightarrow x\in\overline{A\cap(\bar B\cup C)}\Rightarrow x\in\bar A\vee x\in B\cap\bar C\Rightarrow$

$x\in\bar A\vee(x\in\bar C\wedge x\in B)\Rightarrow x\in\bar A\vee x\in\bar C\Rightarrow x\in\overline{A\cap C}$

ולכן, סתירה. ומכאן ש $A\cap C=\emptyset$

ב) אם $A \setminus B = B$ אז $B = \emptyset$

$x \in B \Rightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow x \notin B$

סתירה ל $x \in B$ אז $B = \emptyset$

ג) אם $A \setminus B = B$ אז $A = \emptyset$

נניח בשלילה $A \neq \emptyset$ אז $x \in A$

(לפי הנחה $B = \emptyset$)

$x \in A \Rightarrow A \setminus \emptyset = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$.

(הנחה $B = \emptyset$)

תרגיל

הוכח $B \subseteq A \longleftrightarrow A \cup B \subseteq A$

הוכחה

I נניח ש $A \cup B \subseteq A$ ונוכיח $B \subseteq A$

$x \in B \Rightarrow x \in B \cup A \Rightarrow x \in A$

II נניח ש $B \subseteq A$ ונוכיח $A \cup B \subseteq A$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$.

5) $A \setminus B = B \setminus A$ אם״ם $A = B$

I נניח $A \setminus B = B \setminus A$ ונוכיח ש $A = B$

א) $A \subseteq B$

$x \in A \rightarrow x \in A \wedge U \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup \bar{B} \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge \bar{B}) \Rightarrow x \in (A \wedge B) \vee (x \in B \wedge \bar{A})$

$x \in B \wedge (\underbrace{x \in A \vee \bar{A}}_{U}) \Rightarrow x \in B$.

ב) $B \subseteq A$

$x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \cup \bar{A} \Rightarrow (x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in \bar{A}) \Rightarrow x \in B \wedge A \vee x \in \bar{B} \wedge A \Rightarrow$

$x \in A \wedge (\underbrace{x \in B \vee \bar{B}}_{U}) \rightarrow x \in A$

II נניח $A = B$ ונוכיח ש $A \setminus B = B \setminus A$

א) $A \setminus B \subseteq B \setminus A$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A$

ב) $B \setminus A \subseteq A \setminus B$

$x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$

6.1.20

דיסקרטית - תירגול

קבוצת החזקה

הגדרה

תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A היא אוסף כל הקבוצות החלקיות של A.

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$$

דוגמאות

1) $A=\{1,2\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

2) $A=\{1\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$

3) $A=\{1,2,3\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

4) $A=\emptyset$

$P(A)=\{\emptyset\}\neq\emptyset$ ← לא ריק!

5) $A=\{\emptyset\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

תכונות של קבוצה החזקה

1) $S\in P(A) \longleftrightarrow S\subseteq A$

לדוגמא אם $A=\{1,2\}$ אז $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\{2\}\in P(A)$, $\{2\}\subseteq A$

2) $\emptyset\in P(A)$. כי לפי משפט $\emptyset\subseteq A \overset{\text{לפי תכונה 1}}{\Rightarrow} \emptyset\in P(A)$

3) $P(A)\neq\emptyset$ כי לפי תכונה 2 $\emptyset\in P(A)$ תמיד.

4) $A\in P(A)$. כי $A\subseteq A \overset{\text{לפי תכונה 1}}{\Rightarrow} A\in P(A)$.

5) אם ב-A יש n איברים אז ב $P(A)$ יש 2^n איברים.

6) אם $x\in A$ אז $\{x\}\in P(A)$. כי $x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \overset{\text{תכונה 1}}{\Rightarrow} \{x\}\in P(A)$

7) אם $\{x\}\in P(A)$ אז $x\in A$. כי $\{x\}\in P(A) \overset{\text{תכונה 1}}{\Rightarrow} \{x\}\subseteq A \Rightarrow x\in\{x\}\subseteq A \Rightarrow x\in A$.

תרגיל

נתון $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$. מצאו:

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$P(A)\cap P(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$

$P(A\cap B) = P(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$

$P(A)\cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

$P(A\cup B) = P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

משפט

$P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$

$P(A\cup B) \neq P(A)\cup P(B)$

(*) $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

(*) הוכחה

נתון קיים $S\in P(A)\cup P(B)$ צ"ל $S\in P(A\cup B)$.

$S\in P(A)\cup P(B) \rightarrow S\in P(A)$ או $S\in P(B) \xrightarrow{\text{תכונה של קבוצת חזקה}} S\subseteq A$ או $S\subseteq B \xrightarrow{\text{טענת עזר}} S\subseteq A\cup B \rightarrow$

$S\in P(A\cup B)$

טענת עזר

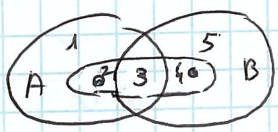
אם $S\subseteq A$ או $S\subseteq B$ אז $S\subseteq A\cup B$.

הוכחה

[illegible] נתון $x\in S$ $\xleftarrow{\text{לפי נתון}}$ $x\in A$ או $x\in B$ $\leftarrow$ $x\in A\cup B$

דרך ב': $S\subseteq B$ או $S\subseteq A$ $\xleftarrow{\text{הגדרה}}$ $S\subseteq A\cup B$ או $S\subseteq B\cup A$ $\leftarrow$ $S\subseteq A\cup B$

כיוון שני לא נכון



$A=\{1,2,3\}$ $A\cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$B=\{3,4,5\}$ $S=\{2,3,4\}$

$S\subseteq A\cup B$

$S\nsubseteq A$

$S\nsubseteq B$

תרגיל

נתון $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$. נמצא:

$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(B)=\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

$P(A)\setminus P(B)=\{\{1\},\{1,2\}\}$

$P(A\setminus B)=P(\{1\})=\{\emptyset,\{1\}\}$

מסקנה

$P(A)\setminus P(B)\neq P(A\setminus B)$

$P(A)\setminus P(B)\nsubseteq P(A\setminus B)$

$P(A\setminus B)\nsubseteq P(A)\setminus P(B)$

הערה

אם U עולם של A אז $P(U)$ עולם $P(A)$

דוגמה

$U=\{1,2,3\}$, $A=\{1,3\}$

$A\subseteq U$

U עולם של A

$P(U)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$

$P(U)$ עולם של $P(A)$ וגם $P(A)\subseteq P(U)$.

תרגיל

נתון $U=\{1,2,3\}$, $A=\{1,3\}$ נמצא:

$P(\bar{A})=P(\{2\})=\{\emptyset,\{2\}\}$

$\overline{P(A)}=\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

מסקנה

$P(\bar{A})\neq\overline{P(A)}$

$P(\bar{A})\nsubseteq\overline{P(A)}$

$\overline{P(A)}\nsubseteq P(\bar{A})$